MAI 1 – řešení 12. domácího úkolu

Výpočet určitého integrálu:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \arcsin^2 x \, dx$: 1) je (R) i (N) integrál, neboť fce $f(x) = \arcsin^2 x$ je spojitá v $\langle -1, 1\rangle$

2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \arcsin^2 x \, dx = 2\int_{0}^{1} \arcsin^2 x \, dx$, neboť $\arcsin^2 x$ je funkce sudá v $\langle -1,1\rangle$;

3) $\displaystyle\int_{0}^{1} \arcsin^2 x \, dx =$ zkusíme substituci

$$\left| \begin{array}{l} \arcsin x = t \\ \quad x = \sin t \ (\equiv g(t)) \\ x \in \langle 0,1\rangle \\ t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 0 \to t = 0 \\ x = 1 \to t = \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} g'(t) = \cos t > 0 \ v \ (0, \frac{\pi}{2}) \\ (\text{a spojitá}) \\ \text{lze tedy užít větu o substituci} \end{array} \Bigg| =$$

$$\underset{VS}{=} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos t \, dt \underset{(\text{DÚ }10)}{=} \left[t^2 \sin t + 2t\cos t - 2\sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

Tedy: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \arcsin^2 x \, dx = 2\int_{0}^{1} \arcsin^2 x \, dx = \frac{\pi^2}{2} - 4$

2. $\displaystyle\int_{2}^{3} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{1}{x}\right) dx$ je vyřešen v písemném cvičení 12.

3. $\displaystyle\int_{2\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}\,dx = \int_{2\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}} \frac{2x}{2x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx \overset{*}{=}$

(i) f je spojitá v $(3,+\infty)$, $\langle 2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}\rangle \subset (3,+\infty)$, tj. integrál existuje (R) i (N) (a rovnají se)

(ii) klasické substituce

$$x^2-9 = t \;(\equiv g(x))$$
$$g'(x) = 2x > 0 \text{ v } \langle 2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}\rangle$$
$$x^2 = t+9$$
$$x = 2\sqrt{3} \to t = 3$$
$$x = 3\sqrt{2} \to t = 18-9 = 9$$

$\displaystyle\overset{*}{=} \frac{1}{2}\int_3^9 \frac{dt}{(t+9)\sqrt{t}}\,dt =$ „další substituce"

$$\sqrt{t} = y \quad (\equiv \varphi(t))$$
$$t = y^2 \quad \left(\varphi'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$$
$$dy = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$$
$$t=3 \to y=\sqrt{3}\,;\quad t=9 \to y=3$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dy}{y^2+9} = \frac{1}{9}\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{1}{1+\left(\frac{y}{3}\right)^2}\,dy = \frac{1}{3}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{3}\right)\right]_{\sqrt{3}}^{3} =$$

$(**)$

$$= \frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \left(= \frac{\pi}{36}\right)$$

A navíc, když se podíváme po těchto dvou substitucích na integrál

$\displaystyle\int_{2\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}} \frac{2x}{x^2\cdot 2\sqrt{x^2-9}}\,dx \overset{*}{=}$, tak „uvidíme" už i substituci „najednou":

$$t = \sqrt{x^2-9}\;(\equiv g(x)), \text{ pak } g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}},$$
$$x^2 = t^2+9, \text{ meze: } x = 2\sqrt{3} \to t = \sqrt{3}$$
$$x = 3\sqrt{2} \to t = 3$$

(a pak) $\displaystyle\overset{*}{=} \int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{1}{t^2+9}\,dt$, což je integrál v $(**)$.

4. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx$

1) opět integrál je (R) i (N), neboť integrand je funkce spojitá v $\langle 0,\pi\rangle$;

2) kdybychom chtěli „přímo" integrál (jako (N)) užitím „doporučené substituce" $\operatorname{tg} x = t$ (neboť $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2}$),

pak „chybí" bod $x = \frac{\pi}{2}$!

tedy buď musíme primitivní funkci, určenou v $(0,\frac{\pi}{2})$ a v $(\frac{\pi}{2},\pi)$ „slepit" v bodě $x=\frac{\pi}{2}$,

nebo, užijeme aditivity integrálu, a pak (díky π-periodicitě fce $\cos^2 x$, stačí určit primitivní funkci v $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$:

$$\int \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx \quad x\in\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right) = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ \cos^2 t = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{1}{1+\frac{3}{1+t^2}}\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{t^2+4}\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) + c \underset{t=\operatorname{tg} x}{=} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} x\right) + c$$

Tato primitivní fce je primitivní funkcí k $\dfrac{1}{1+3\cos^2 x}$ i v $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$,

a tedy:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx = \left(\frac{\pi}{4}-0\right)+\left(0-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$= \Big[\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\big(\underbrace{\tfrac{1}{2}\operatorname{tg} x}_{\to+\infty \text{ pro } x\to\frac{\pi}{2}-}\big)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\big(\underbrace{\tfrac{1}{2}\operatorname{tg} x}_{\to-\infty \text{ pro } x\to\frac{\pi}{2}+}\big)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{0}$$

Dvě poznámky k tomuto příkladu:

1. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx$$ – (souhlasí s výsledkem, ale lze ukázat pomocí substituce)

$\cos^2 x = \cos^2(\pi - x)$ a

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx = \left|\begin{array}{c} \pi - x = t \\ x = \pi - t \\ dx = -dt \\ x = \frac{\pi}{2} \to t = \frac{\pi}{2} \\ x = \pi \to t = 0 \end{array}\right| = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{1+3\cos^2(\pi - t)}\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2 t}\,dt$$, což jsme chtěli ukázat, tedy „stačí" spočítat jen tento integrál

2. Kdybychom provedli substituci $\operatorname{tg} x = t$ v určitém integrálu (se změnou mezí), pak $x = 0 \to t = 0$, ale $x = \frac{\pi}{2} \to t \to \infty$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{4+t^2}\,dt =$$ jako Newtonův integrál (i když jste toto neprobírali, zmíněno na přednášce to bylo)

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) - \operatorname{arctg} 0\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

(u výpočtu „naší" primitivní funkce pro $x \to \frac{\pi}{2}-$ to to byla vlastně limita vnější funkce) a pokud bychom chtěli „vytvořit" primitivní funkci v celém $\langle 0, \pi\rangle$, tak (opět slepením v bodě $x = \frac{\pi}{2}$) (konstantu v $\langle 0, \frac{\pi}{2})$ lze volit $C = 0$)

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} x\right), & x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}) \\ \frac{\pi}{4}, & x = \frac{\pi}{2}. \\ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} x\right) + \frac{\pi}{2} & v\ (\frac{\pi}{2}, \pi\rangle, \end{cases}$$

a pak $$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2 x}\,dx \underset{(N)}{=} \left[F(x)\right]_0^{\pi} = 0 + \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

<u>Užitečné věty o substituci a vlastnosti R-integrálu</u>

(1.) Je-li $f \in R(-a,a)$, $a>0$, f lichá $\Rightarrow$ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

a: $$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \left| \begin{array}{l} x = -t \\ dx = -dt \\ x = -a \to t = a \\ x = 0 \to t = 0 \end{array} \right| = -\int_a^0 f(-t)\,dt = \int_0^a f(-t)\,dt =$$

substituce

ale $f(-t) = -f(t)$

$$= -\int_0^a f(t)\,dt \quad \left(= -\int_0^a f(x)\,dx \text{ – „na označení integrační proměnné nezáleží"} \right)$$

(2.) $f \in R(-a,a)$, f sudá $\Rightarrow$ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ –

– snadno z (1) neboť platí $f(-t) = f(t)$ v $(-a,a)$

3. Je-li f spojitá a sudá v $\langle -a,a\rangle$, $a>0$, pak primitivní funkce je v $(-a,a)$ lichá:

Je-li f spojitá funkce v $\langle -a,a\rangle$, pak primitivní fce k $f(x)$ v $(-a,a)$ je (volíme za „počátek" integrace $x=0$)

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,, \quad x \in (-a,a)$$

vezmeme
$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,dt \underset{\text{subst.}}{=} \left| \begin{array}{l} t=-y\,,\ y=-t \\ dt=-dy\,, \\ \text{meze: } t=0 \to y=0 \\ \qquad\ \ t=-x \to y=x \end{array} \right| =$$

$$= -\int_0^x f(-y)\,dy = -\int_0^x f(y)\,dy\,,$$ neboť dle předpokladu je $f(-y)=f(y)$ v $\langle -a,a\rangle$.

tedy platí: $F(-x) = -F(x)$, F je lichá v $(-a,a)$.

5. a) Máme ukázat (bez výpočtu integrálu), že $\int_{-1}^{2}(e^x - e^{-x})\,dx > 0$:

$f(x) = e^x - e^{-x}$, pak $f(-x) = e^{-x} - e^x = -f(x)$,
tedy f je fce lichá v R, a pak $\int_{-1}^{1}(e^x - e^{-x})\,dx = 0$;

tedy
$$\int_{-1}^{2}(e^x - e^{-x})\,dx = \underbrace{\int_{-1}^{1}(e^x - e^{-x})\,dx}_{=0} + \int_{1}^{2}(e^x - e^{-x})\,dx > 0$$

neboť: $e^x - e^{-x} > 0$ v $\langle 1,2\rangle \Rightarrow \int_1^2 (e^x - e^{-x})\,dx > 0$
$(e^x > e^{-x})$

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln x}{x}\,dx = 0$ $(a>0)$ – opět máme ukázat bez výpočtu integrálu: stačí pro $a>1$, pro $a=1$ je $\int_1^1 f = 0$ (def.)
(a pro $0<a<1$ to plyne z $a>1$)
integrál existuje (N i R) – fce $\frac{\ln x}{x}$ je spojitá v $\langle \frac{1}{a}, a \rangle$ (uvaž. $a>1$)

a $$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{\ln x}{x}\,dx + \int_{1}^{a} \frac{\ln x}{x}\,dx$$

a $$\int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{\ln x}{x}\,dx \underset{\text{subst.}}{=} \left| \begin{array}{ll} \frac{1}{x} = t & \underline{\text{meze:}} \\ & x=1 \to t=1 \\ x = \frac{1}{t} \ (\equiv g(t)) & x=\frac{1}{a} \to t=a \\ g'(t) = -\frac{1}{t^2} \ (\text{neboli } dx = -\frac{1}{t^2}dt) & \end{array} \right|$$

$$= -\int_{a}^{1} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t^2}\,dt = -\int_{a}^{1} \frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{t}\,dt = -\int_{a}^{1} -\frac{\ln t}{t}\,dt$$

$$= \int_{a}^{1} \frac{\ln t}{t}\,dt = -\int_{1}^{a} \frac{\ln t}{t}\,dt,$$ tedy

$$\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\ln x}{x}\,dx = +\int_{\frac{1}{a}}^{1} \frac{\ln x}{x}\,dx + \int_{1}^{a} \frac{\ln x}{x}\,dx = -\int_{1}^{a} \frac{\ln x}{x}\,dx + \int_{1}^{a} \frac{\ln x}{x}\,dx = \underline{0}$$

4. f spojitá a sudá v $\langle -a,a\rangle$ $(a>0)$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx=\int_0^a f(x)\,dx$

---

1) fce $\dfrac{f(x)}{e^x+1}$ je spojitá v $\langle -a,a\rangle$, tedy $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx$ ex. (R) i (N), stejně i $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$.

2)
$$\underline{\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx}=\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx \underset{*}{=}$$

píšeme t místo x („nevadí")

$$\underset{(*)}{=}\int_0^a\frac{f(t)}{1+e^t}\cdot e^t\,dt+\int_0^a\frac{f(t)}{e^t+1}\,dt = \text{(„součet integrálů")}$$

$$=\int_0^a\frac{f(t)}{e^t+1}\,(e^t+1)\,dt=\underline{\int_0^a f(t)\,dt}\quad \text{(cbd)}$$

a v prvním integrálu budeme substituovat $x=-t$:

$$(*)\quad \int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{e^x+1}\,dx=\left|\begin{array}{l} x=-t\iff t=-x\\ dx=-dt\\ x=-a\to t=a\\ x=0\to t=0\end{array}\right|=-\int_a^0\frac{f(-t)}{e^{-t}+1}\,dt=$$

$(f(-t)=f(t))$

$$=\int_0^a\frac{f(t)}{1+e^t}\cdot e^t\,dt\quad \text{(opět, nezáleží na proměnné za } \textstyle\int_0^a)$$

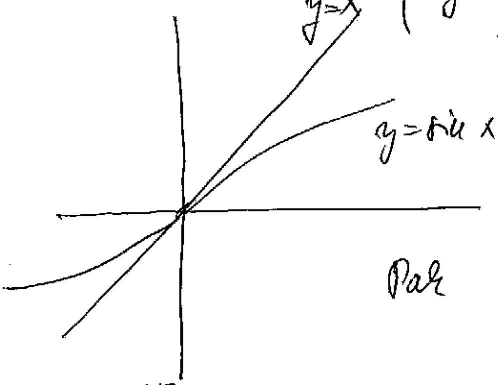
Několik příkladů na aplikace R-integrálu:

1a) Je řešen v písemném cvičení 12. (str. 11)

1b) Máme určit obsah omezené rovinné oblasti ω, kde ω je ohraničena grafy funkcí $y=x^2$, $y=x\sin x$ a přímkou $x=\frac{\pi}{2}$.

v $\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$ je $x\sin x \leqq x^2$, neboť $\sin x \leqq x$ v $\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$

($y=x$ je tečnou v $[0,0]$ ke grafu $y=\sin x$) (platí v $\langle 0,+\infty)$)



a tedy i $x\sin x \leqq x^2$ v $\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$:

$$\text{Pak}\quad S(\omega) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - x\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$$

$$= \frac{\pi^3}{24} - 1 \;(>0)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}};$$

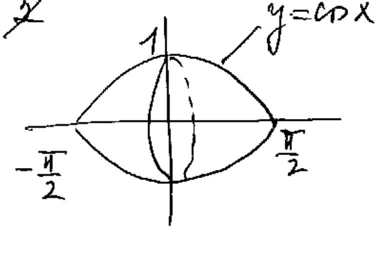
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx \overset{PP}{=} \left| \begin{matrix} u'=\sin x, & u=-\cos x \\ v=x, & v'=1 \end{matrix} \right| = \Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx =$$

$$= 0 + \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

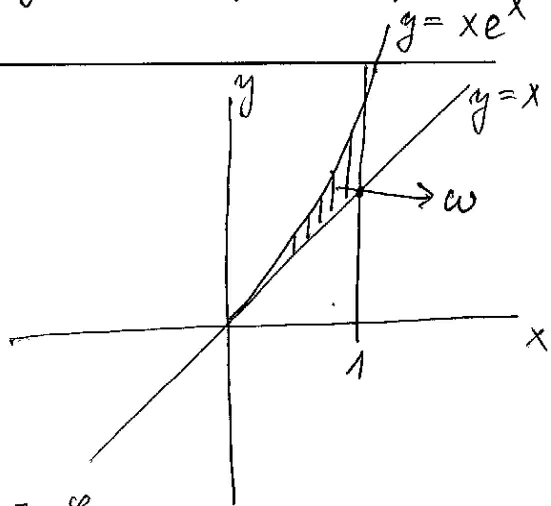
2a) Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací kolem osy x oblasti $\omega = \{[x,y];\ x\in\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle,\ 0\leq y\leq \cos x\}$:

$$V(\Omega) = \pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \cancel{2}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{\cancel{2}}\,dx =$$

$$= \pi\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2}$$



26) ? Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací omezené rovinné oblasti ω, která je ohraničena grafy funkce $y = xe^x$, $y = x$ a přímkou $x = 1$.



Jak „vypadá" oblast ω ?

v $\langle 0,1\rangle$ je $e^x \geqq 1 \quad | \cdot x>0$

$xe^x \geqq x$ pro $x>0$

$V(\Omega) = V_1 - V_2$, kde

V_1 je objem rotačního tělesa, vytvořeného rotací plochy mezi osou x a grafem $y = xe^x$

a V_2 – objem kužele o výšce $=1$ a poloměru základny 1

(vznikne rotací trojúhelníku, ohraničeného $y=x$, osou x a $x=1$)

$$\text{tj.: } V(\Omega) = \pi\int_0^1 (xe^x)^2 dx - \pi\int_0^1 x^2 dx = \pi\left(\frac{e^2-1}{4} - \frac{1}{3}\right)$$

$$\left(= \frac{\pi}{12}\left(3e^2-7\right)\right)$$

$$\pi\int_0^1 x^2 dx = \pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3} \quad \text{(odpovídá vzorci pro objem kužele)}$$

$$\int_0^1 (xe^x)^2 dx = \int_0^1 x^2 e^{2x} dx \underset{pp}{=} \left| \begin{matrix} u' = e^{2x}, & u = \frac{e^{2x}}{2} \\ v = x^2, & v' = 2x \end{matrix} \right| = \left[x^2\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 x e^{2x} dx =$$

$$\underset{pp}{=} \left| \begin{matrix} u' = e^{2x}, & u = \frac{e^{2x}}{2} \\ v = x, & v' = 1 \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}e^2 - \left(\left[x\,\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{2}e^2 - \frac{e^2-1}{4}\right] = \frac{e^2-1}{4}$$

3a) <u>Máme určit délku grafu funkce $f(x)=\frac{x^2}{2}$ pro $0\le x\le a$, $a>0$.</u>

$$l=\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$ pro délku grafu funkce $y=f(x)$, $x\in\langle a,b\rangle$, která má v $\langle a,b\rangle$ spojitou derivaci $f'(x)$.

Tedy zde: $f'(x)=x$, spojitá v $\langle 0,a\rangle$, tedy

$$l=\int_0^a \sqrt{1+x^2}\,dx \underset{pp}{=} \left| \begin{array}{ll} u'=1, & u=x \\ v=\sqrt{1+x^2}, & v'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{array} \right| =$$

(primitivní funkci $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$ jsme počítali, nicméně zopakovat)

$$=\left[x\sqrt{1+x^2}\right]_0^a-\int_0^a \frac{x^2\ (+1-1)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\left[x\sqrt{1+x^2}\right]_0^a-\int_0^a\sqrt{1+x^2}\,dx+\int_0^a\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx,$$

tedy dostaneme (z rovnice pro $\int_0^a\sqrt{1+x^2}\,dx$):

$$\int_0^a\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(a\sqrt{1+a^2}+\left[\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^a\right)=$$

$$=\underline{\frac{1}{2}\left(a\sqrt{1+a^2}+\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right)}$$

(užili jsme „tabulka" $\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$ v $\mathbb{R}$

– opět jsme řešili jako příklad výpočtu integrálu neurčitého)

Poznámka: Je „vidět", že výpočet délky grafu vede ke složitějším integrálům – odmocnina z kvadratických výrazů se nevypočte neintegruje.

3b) je řešen v písemném cvičení 11 (na konci – strana 14)

3c) nelze určit délku grafu fce

$$f(x) = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \quad \text{v} \quad \langle -1,1\rangle$$

Potřebujeme

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}\cdot(-\cancel{2}x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\ , \ \underline{\text{ale jen } x\in(-1,1)}\ !$$

$$1+f'^2(x) = 1 + \frac{(1-x)^2}{1-x^2} = \frac{1-x^2+1-2x+x^2}{1-x^2} = \frac{2(1-x)}{(1-x)(1+x)} =$$

$$= \frac{2}{1+x} \quad \text{v } (-1,1)$$

Tedy by bylo: $$l = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx = \int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+x}}\,dx =$$

$$= \sqrt{2}\cdot 2\Big[\sqrt{1+x}\Big]_{-1}^{1} = \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} = 4\ ,$$

ale tento integrál není integrál Riemannův, neboť funkce $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ není omezená v $(-1,1)$ $\left(\lim\limits_{x\to -1+}\frac{1}{\sqrt{1+x}} = +\infty\right)$,

ale i Newtonův integrál se používá za „model" pro délku grafu, i když je „vzorec" odvozen díky „myšlení" Riemanna (pomocí integrálních R-součtů coby „aproximace" délky „křivky" grafu délkou lomené čáry – viz přednáška)